

Infos : Notes de cours LaTeX disponibles sur moodle

⚠ Ces notes n'ont pas encore été relues!! ⚠
 <> Séries : pour les corrigés, il faut aller voir dans le livre
 → les corrigés du livre sont parfois agrémentés d'Add-ons
 ou on publie en même temps que les corrigés.

Rappel :

<> Typo solution

ex 3 : $\frac{3-4}{-3}$

Définition 1.8 le laplacien

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f \in C^2(\Omega)$ un champ scalaire.

Le laplacien de f , noté Δf est le champ scalaire.

$\Delta f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Exemple 1.9 (suite)

$$(ii) f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x e^{-(x^2+y^2)}$$

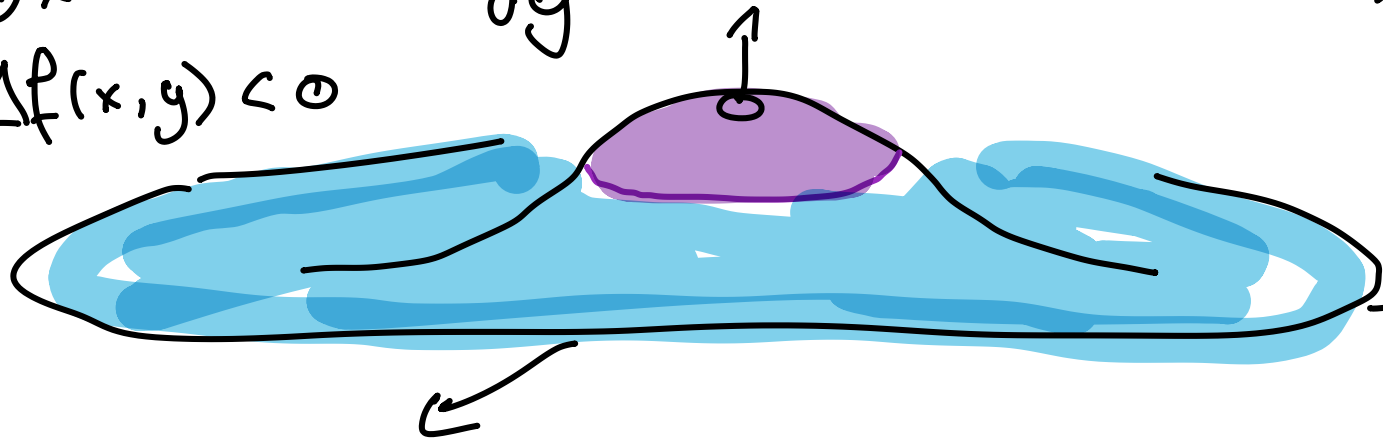
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2 \cdot e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2 e^{-(x^2+y^2)}$$

Similairement, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2 e^{-(x^2+y^2)}$

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4(x^2 + y^2 - 1) e^{-(x^2+y^2)}$$

si $x^2 + y^2 < 1$, $\Delta f(x, y) < 0$

$\Rightarrow f(x)$ est plus grande que sa moyenne



si $x^2 + y^2 > 1$,

$$\Delta f(x, y) > 0$$

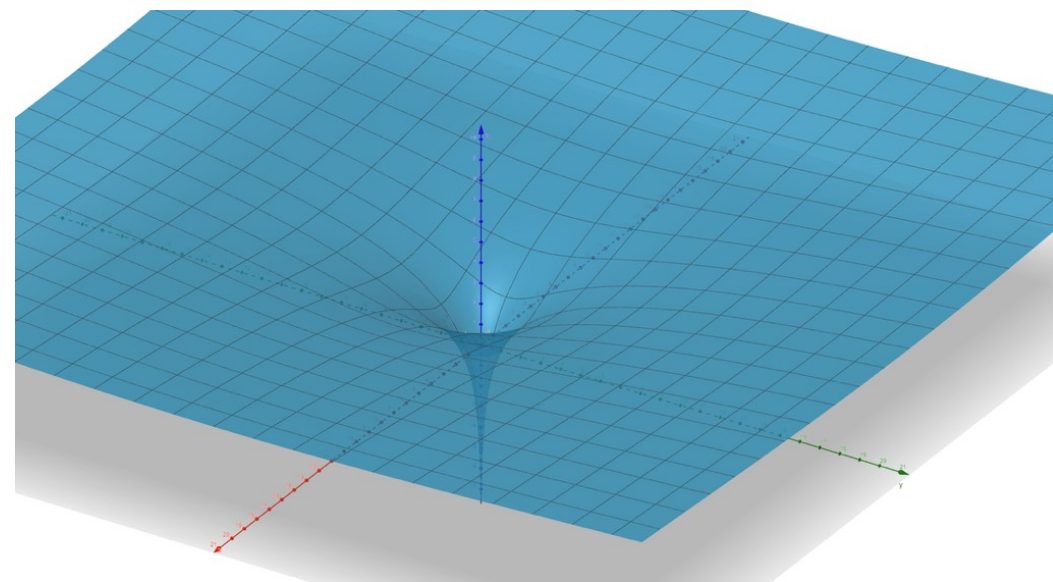
$\Rightarrow f(x)$ est plus petit que sa moyenne.

$$(iii) \quad f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2(x^2 + y^2) - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= 2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad , \quad \text{similairement,} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$



§1.5 Formules de différentiation

Théorème 1.10

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f \in C^2(\Omega)$, $F \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Alors,

(i) $\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f$.

(ii) $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$ ($n=2, 3$)

(iii) Si $n=3$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

Démonstration: On fait (ii) les autres sont similaires.

Si $n=2$ $f(x, y)$ $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$

$$\operatorname{rot}(\nabla f)(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right](x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right](x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

$f \in C^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Rightarrow = 0$

Si $n=3$ $f(x, y, z)$, $\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right)$

$$\text{rot}(\nabla f) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= e_x \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + e_y \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + e_z \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - e_z \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - e_x \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - e_y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = (0, 0, 0)$$

Remarque 1.11 :

D'autres formules sont établies dans la série 2.

Chapitre 2: Intégrales curvilignes, champs qui dérivent d'un potentiel.

§ 2.1 Courbes dans $\mathbb{R}^n$

Définition 2.1: Courbe régulière, simple, fermée, paramétrisations

$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ est une courbe régulière si $\exists$ un intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ et une fonction $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $t \longmapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$

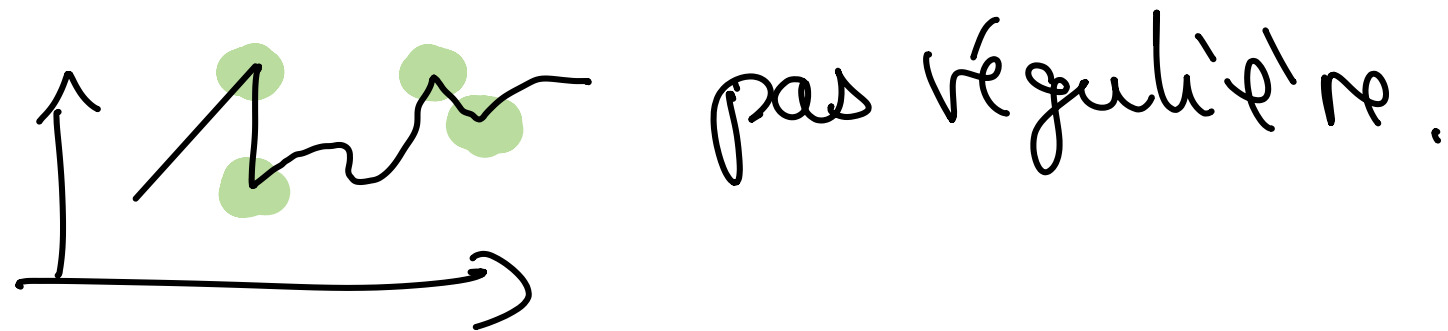
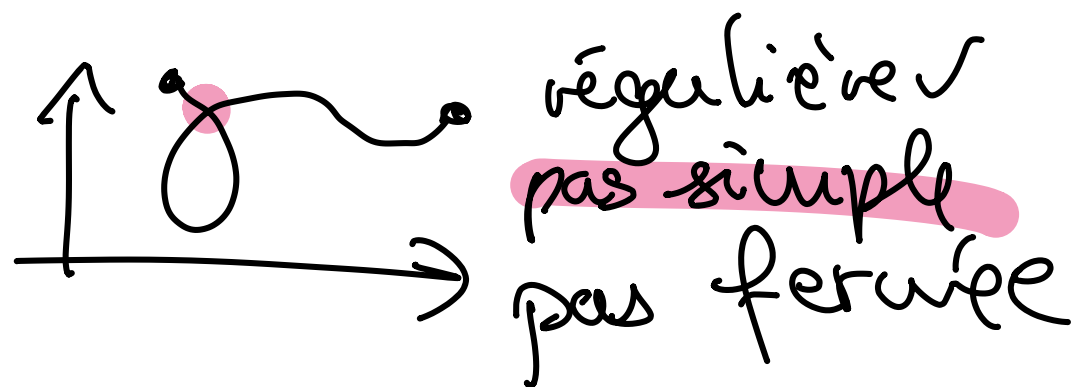
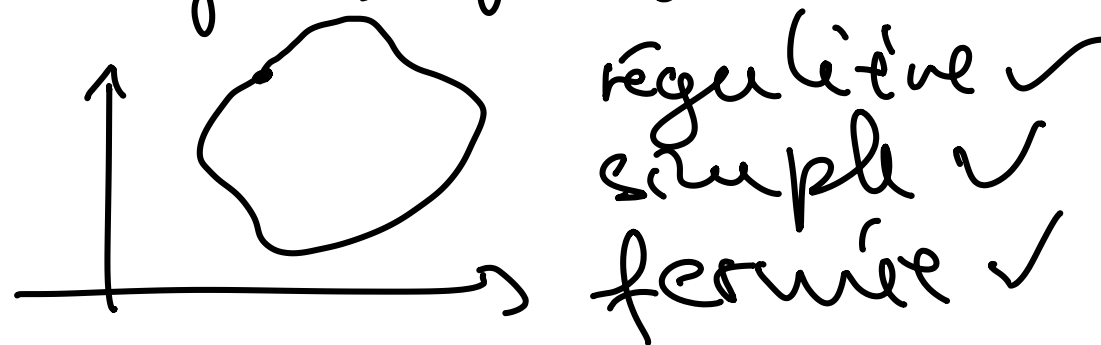
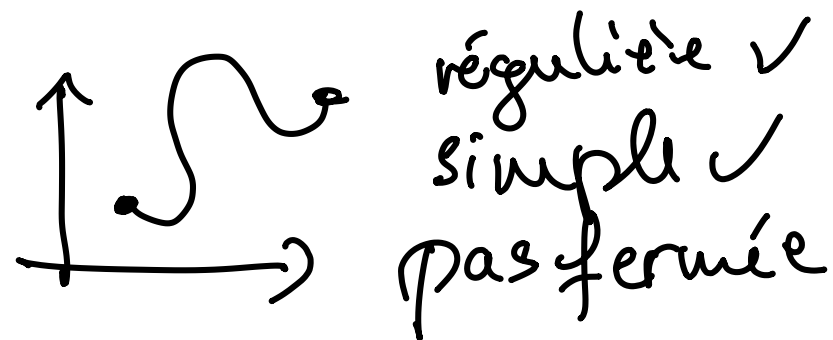
t_γ
(i) $\gamma([a, b]) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in [a, b] \text{ t.q. } x = \gamma(t)\} = \Gamma$

(ii) $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$, (iii) $\forall t, |\gamma'(t)| = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_n'(t))^2} \neq 0$

γ est une paramétrisation de T .

De plus, T est une courbe simple si γ est injective sur $[a, b[$.

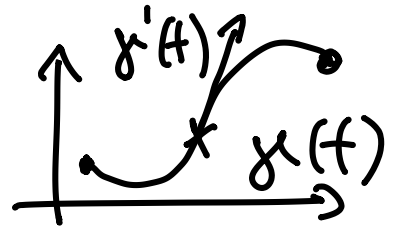
T est une courbe fermée si $\gamma(a) = \gamma(b)$.



On dit que T est une courbe régulière par morceaux si $\exists T_1, \dots, T_k$ des courbes régulières tq $T = \bigcup_{i=1}^k T_i$

Remarque 2.2

On interprète souvent $\gamma(t)$ comme la position au temps t .



$\gamma'(t)$ est la vitesse au temps t

$|\gamma'(t)|$ est la vitesse scalaire.

Exemples 2.3 : trouver une paramétrisation

(i) graphes de fonctions: $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, y \leq 1\}$

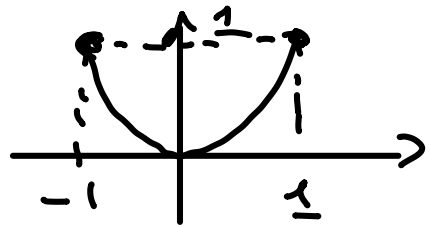
$$\gamma_1(t) = x = t$$

$$\gamma_2(t) = y = x^2 = t^2$$

On a l'expression, manque le domaine!

$$y \leq 1 \Leftrightarrow t^2 \leq 1 \Leftrightarrow t \in [-1, 1]$$

$\Rightarrow \gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t, t^2)$



(ii) $\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 1, \quad 0 \leq x, y \leq 2 \}$

deux possibilités:

(a) $x \cdot y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} \rightarrow$ graphe d'une fonction.

$$\gamma_1(t) = x = t, \quad \gamma_2(t) = y = \frac{1}{x} = \frac{1}{t}.$$

$$0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2$$

$$0 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{t} \leq 2 \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{2} \quad \left. \vphantom{0 \leq y \leq 2} \right\} t \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right]$$

$$\gamma: \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \gamma(t) = \left(t, \frac{1}{t} \right)$$

(b) $x \cdot y = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$ - graphe d'une fonction de y

$$y_2(t) = y = t, \quad y_1(t) = x = \frac{1}{y} = \frac{1}{t}.$$

idem qu'avant, $t \in [1/2, 2]$.

$$\gamma: [1/2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \gamma(t) = \left(\frac{1}{t}, t\right)$$

(iii) Changement de coordonnées:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} \rightarrow \text{coordonnées polaires.}$$

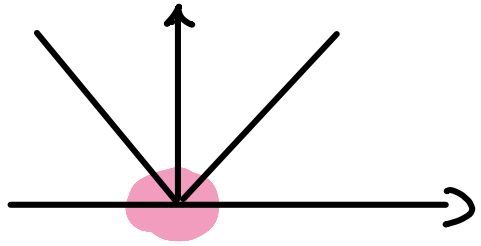
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = 4 \Leftrightarrow r^2 = 4 \Leftrightarrow r = 2.$$

r est fixé à 2, n'est plus une variable, $\rightarrow \theta$ sera la variable. $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$

(iv) Pourquoi $|x'(t)| \neq 0$ dans la def de courbe régulière?

$$T = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|, y \leq 1 \}$$



$$\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (t, |t|), \quad \triangle ! \quad |t| \text{ n'est pas } C^1, \\ \Rightarrow \gamma \notin C^1$$

$$\tilde{\gamma} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \tilde{\gamma}(t) = (t^3, |t| \cdot t^2)$$

est C^1 !

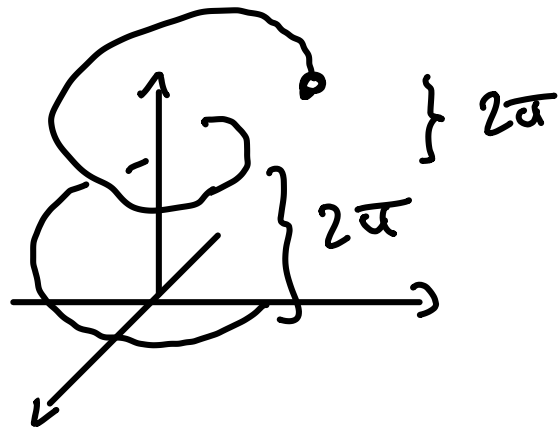
$$\tilde{\gamma}'(0) = (0, 0)$$

$$(c) \quad \Gamma = \{ (2\cos t, 2\sin t, t) : t \in [0, 4\pi] \}$$

$$\gamma: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto \gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$$

$$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 1) \neq 0$$



§ 2.2. Intégrales curvilignes

Définition 2.4 : Intégral curvilignes.

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $\Gamma \subseteq \Omega$ une courbe régulière de paramétrisation γ .

Si $f \in C^0(\Omega)$, on définit l'intégrale curviligne de f le long de T par

$$\int_T f \, dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| \, dt \in \mathbb{R}$$

Si $F \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$, on définit l'intégrale curviligne de F le long de T  **dans le sens donné γ .**

$$\int_T F \cdot dl = \int_a^b \langle F(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle \, dt \in \mathbb{R}.$$

Si $T = \bigcup_{i=1}^k T_i$ est régulière par morceaux avec T_i réguliers

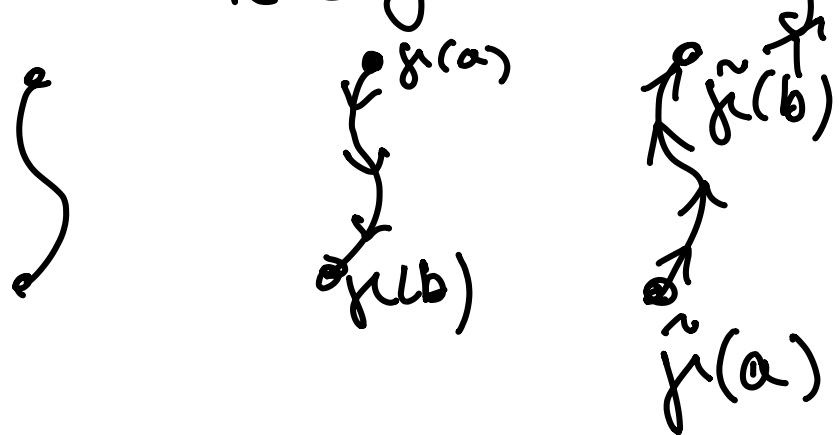
$$\int_T f \, dl = \sum_{i=1}^k \int_{T_i} f \, dl, \quad \int_T F \cdot dl = \sum_{i=1}^k \int_{T_i} F \cdot dl.$$

Remarque 2.5 : Sens & longueur.

(i) Pour $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe régulière, on définit sa longueur par $\text{long}(\Gamma) = \int 1 dl$.

(ii) Si f est un champ scalaire, $\int_{\Gamma} f dl$ ne dépend pas de γ .
($|x'(t)| \cdot dt$ fait office de "Jacobien")

Si F est un champ vectoriel, $|\int_{\Gamma} F \cdot dl|$ ne dépend pas de γ .
mais le signe de $\int_{\Gamma} F \cdot dl$ dépend de γ .



En effet, si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une paramétrisation, on peut construire $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $t \mapsto \tilde{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t)$

$$\tilde{y}'(t) = -y'(a+b-t)$$

$$\int_a^b \langle F(\tilde{y}(t)); \tilde{y}'(t) \rangle = \int_a^b \langle F(y(a+b-t)); -y'(a+b-t) \rangle dt$$

$$\stackrel{a+b-t=s}{=} \int_b^a \langle F(y(s)), -y'(s) \rangle (-1) ds = - \int_a^b \langle F(y(t)), y'(t) \rangle dt.$$